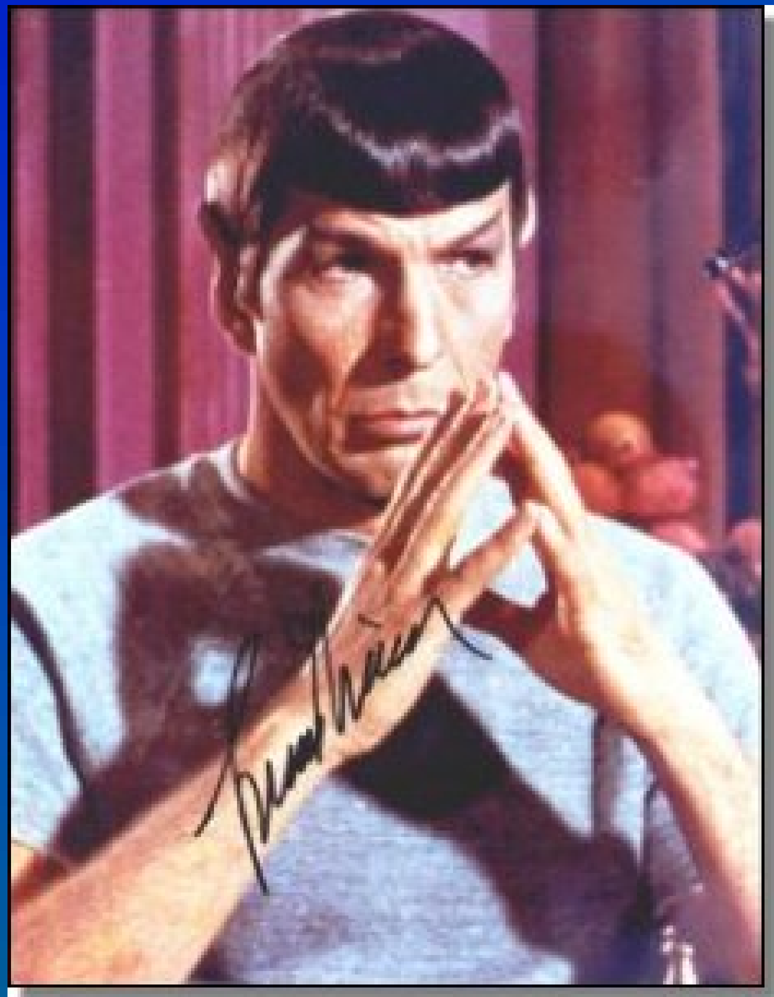
Logik

Literatur:

Dallmann, H. & Elster, K.H. (1991). *Einführung in die höhere Mathematik, Band I.* Jena: Fischer.

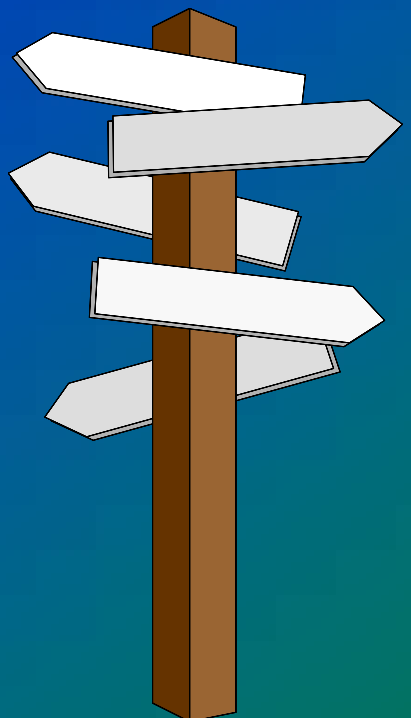
(Kapitel 1, pp. 17-30)

Quine, W.V.O. (1964 / 1995). *Grundzüge der Logik.* Frankfurt a.M.: Suhrkamp.



„Logic is the beginning of wisdom, not the end.“

Logische Grundbegriffe



Wahre und falsche Aussagen

"Die Erde dreht sich um die Sonne."	**W**
"7 ist eine Primzahl".	**W**
"Psychologie ist interessanter als Logik."	**F**

Aussagen **Wahrheitswerte**

Jeder Aussage kann genau einer von zwei möglichen Wahrheitswerten ("wahr" oder "falsch") zugeordnet werden:

Satz vom ausgeschlossenen Dritten:
Jede Aussage ist wahr oder falsch.

Satz vom ausgeschlossenen Widerspruch:
Es gibt keine Aussage, die sowohl wahr als auch falsch ist.

Logische Funktionen

Funktionen sind **Verknüpfungen** logischer Aussagen. Wenn wir die Wahrheitswerte der einzelnen Aussagen kennen, können wir den Wahrheitswert der Verknüpfung der Aussagen.

Die gebräuchlichsten logischen Funktionen:

A und B seien irgendwelche Aussagen:

Negation:	"nicht A"	$\neg$ **A**
Konjunktion:	"sowohl A als auch B"	**A** $\wedge$ **B**
Alternative:	"A oder B <u>oder beide</u>"	**A** $\vee$ **B**
Implikation:	"Immer wenn A, dann B"	**A** $\Rightarrow$ **B**
Äquivalenz:	"A genau dann, wenn B"	**A** $\Leftrightarrow$ **B**

Beispiele:

A: "3 ist eine Primzahl." (Wahrheitswert: W)
B: "4 ist eine Primzahl." (Wahrheitswert: F)

$\neg$ A:	**"3 ist keine Primzahl."**	**F**
A $\wedge$ B:	**"3 und 4 sind beide Primzahlen."**	**F**
A $\vee$ B:	**"3, 4 oder beide sind Primzahlen."**	**W**

Wahrheitswerttafeln:

Negation: logisches "nicht"

w(A)	**w(¬ A)**
W	F
F	W

w("Logik ist langweilig") = F

$\Rightarrow$ w("Logik ist nicht langweilig") = W

Konjunktion: logisches "und"

w(A)	**w(B)**	**w(A $\wedge$ B)**
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Sind die folgenden Aussagen wahr?

"7 ist eine Primzahl und größer als 2."

$W \wedge W \rightarrow W$

"7 ist eine Primzahl und 9 auch."

$W \wedge F \rightarrow F$

"7 ist zwar keine Primzahl, aber 3 ist eine."

$F \wedge W \rightarrow F$

"7 ist keine Primzahl und 5 auch nicht"

$F \wedge F \rightarrow F$

Alternative: logisches "oder"

w(A)	**w(B)**	**w(A $\vee$ B)**
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Wichtig:

"oder" gilt im nicht-ausschließenden Sinne
(**"A oder B oder beide"**, <u>nicht</u> **"entweder A oder B"**) !

Sind die folgenden Aussagen wahr?

"7 ist eine Primzahl oder größer als 2."

$W \vee W \rightarrow W$

"7 ist eine Primzahl, oder zumindest ist 9 eine."

$W \vee F \rightarrow W$

"Mindestens eine der Zahlen 4 und 7 ist eine Primzahl."

$F \vee W \rightarrow W$

"Mindestens eine der Zahlen 5 und 7 ist keine Primzahl."

$F \vee F \rightarrow F$

Implikation: logisches "wenn-dann"

w(A)	**w(B)**	**w(A $\Rightarrow$ B)**
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Vorsicht: Ist **nur dann** falsch, wenn das Vorderglied richtig und das Hinterglied falsch ist!

Ist die folgende Aussage wahr?

"Wenn 7 eine Primzahl ist, ist der Mond aus grünem Käse."

7 Primzahl, Mond aus Käse:	$W \Rightarrow W \rightarrow W$
7 Primzahl, Mond nicht aus Käse:	$\boxed{W \Rightarrow F \rightarrow F}$
7 keine Primzahl, Mond aus Käse:	$F \Rightarrow W \rightarrow W$
7 keine Primzahl, Mond nicht aus Käse:	$F \Rightarrow F \rightarrow W$

Ist die folgende Aussage wahr?

"Wenn 4 eine Primzahl ist, ist der Mond aus grünem Käse."

4 Primzahl, Mond aus Käse:	$W \Rightarrow W \rightarrow W$
4 Primzahl, Mond nicht aus Käse:	$W \Rightarrow F \rightarrow F$
4 keine Primzahl, Mond aus Käse:	$F \Rightarrow W \rightarrow W$
4 keine Primzahl, Mond nicht aus Käse:	$F \Rightarrow F \rightarrow W$

Aus Falschem folgt Beliebiges!

Äquivalenz: logisches "="

w(A)	**w(B)**	**w(A $\Leftrightarrow$ B)**
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

(Äquivalenz genau dann, wenn die Wahrheitswerte übereinstimmen)

Die Äquivalenzfunktion nennt man auch **Bikonditional:**

$$\mathbf{(A \Leftrightarrow B) \equiv ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))}$$

(A und B sind äquivalent heißt:
A impliziert B <u>und</u> B impliziert A.)

Verknüpfung von Konjunktionen

Problem: Wann ist der folgende Satz wahr?

(wenn A, dann B) genau dann, wenn [wenn (nicht B), dann (nicht A)]

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow [(\neg B) \Rightarrow (\neg A)]$

A	**B**	**$A \Rightarrow B$**	**$\neg B$**	**$\neg A$**	**$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$**	**also:**
W	W	W	F	F	W	W
W	F	F	W	F	F	W
F	W	W	F	W	W	W
F	F	W	W	W	W	W

Der Satz ist allgemeingültig oder **tautologisch**: er ist immer wahr, egal was die Wahrheitswerte der Argumente sind - d.h., er ist ein **logisches Gesetz**.

Logisches Gesetz:

Ein beliebig komplizierter Ausdruck, aus dem immer der Wahrheitswert **W** folgt, *egal welche Wahrheitswerte man den einzelnen Argumenten gibt.*

Ein Ausdruck, aus dem immer der Wahrheitswert **F** folgt, heißt **unerfüllbar**.

Ein paar Gesetze der Aussagenlogik:

$A \vee \neg A$	ausgeschlossenes Drittes
$\neg (A \wedge \neg A)$	ausgeschlossener Widerspruch
$\neg (\neg A) \Leftrightarrow A$	doppelte Verneinung

De Morgan'sche Regeln:

$\neg (A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

$\neg (A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

auch noch nützlich: $[(A \vee B) \wedge \neg A] \Rightarrow B$

Gesetze, die man zum logischen Schließen braucht:

$[(A \Rightarrow B) \land A] \Rightarrow B$	Modus ponens
$[(A \Rightarrow B) \land \neg B] \Rightarrow \neg A$	Modus tollens
$[(A \Rightarrow B) \land (B \Rightarrow C)] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	Kettenschlußregel

Nochmal: Diese Regeln stimmen **immer**, egal was für Wahrheitswerte man einsetzt!

Ein logischer Schluß

Wenn es regnet, wird die Straße naß.	**1. Prämisse**
Es regnet.	**2. Prämisse**

Die Straße wird naß.	**Konklusion**

Logische Schlüsse mit genau zwei Prämissen nennt man **Syllogismen.**

Was ist mit diesem hier?

Wenn es regnet, wird die Straße naß.
Die Straße ist naß.

Es regnet.

Stimmt's oder nicht ?

Gültigkeit und inhaltliche Richtigkeit

Gültigkeit:
"Hat der Schluß eine korrekte logische Form?"

Inhaltliche Richtigkeit:
"Ist die Straße wirklich naß, weil es geregnet hat?"

Ein Argument kann also logisch gültig sein, aber trotzdem inhaltlich falsch:

Alle Spinnen haben sechs Beine.
Alle sechsbeinigen Tiere haben Flügel.

Alle Spinnen haben Flügel.

Spezielle Schlußformen: Modus Ponens

$P \Rightarrow Q$
P

Q

"Wer ein Hotel auf Hawaii besitzt, ist reich."
"Ich habe ein Hotel auf Hawaii."

"Ich bin reich."

Modus Tollens

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \neg Q \\ \text{----------} \\ \neg P \end{array}$$

"Wer ein Hotel auf Hawaii besitzt, ist reich."
"Ich bin nicht reich."

"Ich habe kein Hotel auf Hawaii."

Der Modus Tollens sieht manchmal ziemlich abwegig aus:

$$\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \neg\, Q \\ \hline \neg\, P \end{array}$$

"Falls es morgen schneit, werden wir Spaß haben."
"Wir werden morgen keinen Spaß haben."

"Es wird morgen nicht schneien."

Vorsicht: Der Schluß ist zwar logisch gültig, aber inhaltlich wahrscheinlich irreführend!

"Falls es morgen schneit, werden wir Spaß haben."
"Wir werden morgen keinen Spaß haben."

"Es wird morgen nicht schneien."

Warum wirkt dieser Schluß wie Unsinn, obwohl er logisch in Ordnung ist?

"wenn-dann" ist hier nur eine **logische** Verknüpfung: damit der Schluß auch inhaltlich Sinn macht, muß es aber eine **kausale** Verknüpfung geben

Ungültige Schlußformen

Merksatz:

Zu jeder gültigen Schlußform gibt es eine ungültige, die viel häufiger vorkommt.

Fehler beim Modus Ponens:
"Affirming the consequent"

korrekt:

$P \Rightarrow Q$
P

Q

inkorrekt:

$P \Rightarrow Q$
Q

P

"Wenn es regnet, wird die Straße naß."
"Die Straße ist naß."

"Es regnet." **(falsch!)**

Fehler beim Modus Tollens: "Denying the antecedent"

korrekt:

$P \Rightarrow Q$
$\neg Q$

$\neg P$

inkorrekt:

$P \Rightarrow Q$
$\neg P$

$\neg Q$

"Wenn es regnet, wird die Straße naß."
"Es regnet nicht."

"Die Straße wird nicht naß." **(falsch!)**

Ein ganz wichtiges Konzept:
Hinreichende und notwendige Bedingungen

P ist eine **hinreichende Bedingung** für Q, wenn Q zwangsläufig auf P folgt.

$$\boxed{P \Rightarrow Q}$$

Das heißt **nicht**, daß Q nicht auch ohne P geschehen könnte!

P ist eine **notwendige Bedingung** für Q, wenn Q ohne P nicht geschehen könnte.

$$\boxed{\neg P \Rightarrow \neg Q}$$

Das heißt **nicht**, daß P alllein ausreicht, um Q hervorzurufen!

Sind die folgenden Bedingungen für spätere Erkrankungen notwendig, hinreichend oder beides?

1) Virusinfektion

$\Rightarrow$ nicht notwendig: man kann auch anders krank werden;
$\Rightarrow$ nicht hinreichend, da nicht jede Infektion zur Krankheit führt.

2) Ungebremster Sturz aus größerer Höhe

$\Rightarrow$ nicht notwendig: man kann sich auch anders weh tun;
$\Rightarrow$ aber hinreichend (10 Meter sollten reichen).

Herausforderung:

Notwendige **und** hinreichende Bedingungen für bestimmte Krankheiten zu finden; z.B. Schnupfen:

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)}$$


STAR TREK